Aktivnost 9

Pomagajmo cestarjem!

Kako bi bilo potrebno asfaltirati ceste v Blatnem dolu, da bo ostalo dovolj denarja za bazen? Kje bi potegnili ceste po Sloveniji, če ne bi bilo hribov in gora?

Namen

Otroci vidijo prvi primer optimizacijskega problema: podana je naloga, ve se, kakšne so njene dovoljene rešitve, otroci pa morajo poiskati optimalno.

Otroci utrjejo pojem algoritma v smislu natančno podanih navodil, ki jim je potrebno slediti in nas bodo zagotovo pripeljala do želenega cilja.

Otroci prvič srečajo graf kot abstraktno predstavitev podatkov.

Konkreten problem, ki ga rešujejo, je aktualen tudi sam zase: gre za problem iskanja v nekem smislu optimalnega omrežja. Mimogrede vidijo tudi, da optimalna rešitev v enem smislu ni optimalna v vseh smislih: rešitev, ki jo najdejo, ima najmanjšo vsoto dolžin povezav, ne vsebuje pa najkrajše povezave med vsakim posameznim parom točk.

Trajanje

1 ura

Potrebščine

- pole za vsakega otroka

Vir: vidra.fri.uni-lj.si; izvirnik: csunplugged.org

Blatni dol

1. Razdeli pole z zemljevidom Blatnega dola (in Slovenije, ki pa bo še počakala).

2. Razloži zgodbo: v Blatnem dolu imajo namesto asfaltiranih cest makadamske poti in kolovoze, ki so, kot nam pove že ime naselja, pogosto blatne. Po vsakem dežju so se avti vdirali v blato in pešci so imeli umazane škornje. Blatnodolski župan se je odločil, da bo potrebno poti asfaltirati, vendar za to ne želi porabiti preveč denarja, saj nameravajo kasneje zgraditi še bazen.
   - Potrebno bo asfaltirati toliko poti, da bo mogoče od vsake hiše do vsake druge priti po asfaltu,
   - Za asfaltiranje je potrebno porabiti čim manj denarja.

   Asfaltiranje vsake poti stane toliko, kolikor je kamnov na poti. Ugotovi, katere poti bo potrebno asfaltirati, da bo tako, kot si želi župan.

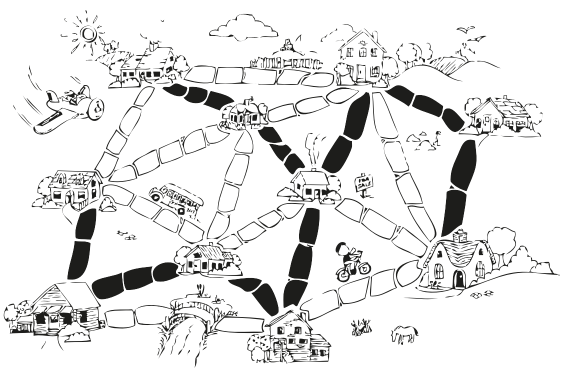
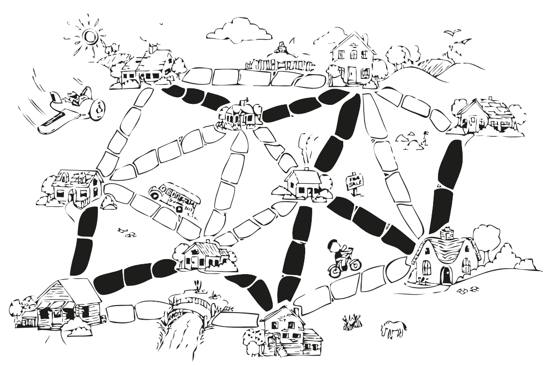
3. Otroci naj z barvanjem "asfaltirajo" poti. Poskusijo naj najti najcenejšo rešitev.

4. Izzovi otroke, naj opišejo, kako se pametno in sistematično lotiti problema. Bi znali sestaviti navodila, ki bi dala pameten izbor poti za poljubno mesto?

Pogovor

Učencem pokaži dva postopka. Eden je, da začneš s praznim zemljevidom in v vsakem koraku dodaš najkrajšo povezavo, vendar le, kadar z njo povežeš dve hiši ali dve skupini hiš, ki dotlej še nista bili povezani. Če bi najkrajša povezava omogočila krožno pot, jo izpustiš in nadaljuješ z naslednjo najkrajšo.

Kadar je na voljo več najkrajših povezav, naključno izbereš eno od njih. Postopek zato ne da vedno enake rešitve, vseeno pa vedno poišče eno izmed enako dobrih *najboljših* rešitev. Dve sta narisani spodaj.

Drugi postopek je, da začneš z zemljevidom, na katerem so asfaltirane vse ceste, in postopno odstranjuješ asfalt. Najprej ga pobereš z najdaljše poti, nato z druga najdaljše in tako proti krajšim, vendar paziš, da nikoli ne odstraniš kake povezave, zaradi katere ne bi bilo več mogoče priti od vsake hiše do vsake hiše.

Kje najdemo takšne mreže v vsakdanjem življenju? V sodobnem svetu nas povezujejo številna omrežja: telefonsko omrežje, mestni plinovod in vodovod, električno omrežje, računalniško omrežje, cestne mreže. Pri postavljanju omrežja se je potrebno odločiti, kje bomo postavili povezave, da bo omrežje čim cenejše, a hkrati čim boljše delovalo.

Preprostejši zemljevidi

1. Razdeli pole z grafi.
2. Razloži, da je graf, ki so ga dobili, pravzaprav zemljevid Blatnega dola, le da namesto hiš rišemo kar kroge, poti zamenjamo z ravnimi črtami in obnje napišemo njihove dolžine.
3. Otroci naj označijo najcenejše asfaltiranje še na tako narisanem zemljevidu.
4. Na drugem grafu je zamljevid sosednjega naselja, Blatnograda. Otroci naj asfaltirajo še tega. Poiščejo naj rešitev, pri kateri porabijo čim manj asfalta in primerjajo rezultate med seboj.
5. Vsak učenec naj si izmisli še kakšno vas, ki je potrebna asfaltiranja in si jo izmenja s sošolcem.

Pogovor

Vprašaj učence, ali bi znali uganiti, koliko poti (ne kakšno dolžino, temveč kakšno število poti) je potrebno asfaltirati za vas s petimi hišami? In koliko za vas z desetimi, dvajsetimi ali petdesetimi?

Izkaže se, da za n hiš potrebujemo n–1 povezav. Toliko jih je vedno dovolj, če dodamo še eno, pa je nepotrebna.

Slovenske avtoceste

Na koncu bodo otroci načrtovali slovenske avtoceste.

Razloži nalogo: povezati slovenske kraje na zemljevidu, tako da bo mogoče iz vsakega v vsakega priti po avtocesti? Pri tem se delamo, da v Sloveniji ni še nobene avtoceste in da je mogoče nove avtoceste speljati iz kraja v kraj naravnost, brez ovinkov. Razdalje med cestami lahko merijo na oko, kadar niso prepričani, si pomagajo z merilom.

Pogovor

Kako pridemo iz Celja v Ptuj? Če so otroci upoštevali navodila, pot iz Celja v Ptuj vodi prek Velenja, Raven na Koroškem in Maribora. (Opomba: Ravne na Koroškem so namerno narisane nekoliko preveč vzhodno, da je pravilna rešitev jasnejša.) To ne zveni prav. Kako lahko gre najboljša pot, tista z najmanj asfalta tako naokrog?

Postopek ne poišče najkrajše poti med dvema krajema (ali celo vsakim parom krajev), temveč takšne povezave, pri katerih skupno porabimo najmanj asfalta. To ni isto. V pravilni rešitvi zastavljene naloge je Ptuj s Celjem povezan po ovinku prek Koroške. Če bi si zastavili nalogo poiskati najkrajšo pot med Celjem in Ptujem, bi šli naravnost.

Za učitelje: za kaj gre?

Predstavitvi mreže, v kateri rišemo le točke in povezave, pravimo grafi. Ime je nekoliko nerodno, saj besedo "graf" uporabljamo tudi za grafične predstavitve funkcij ali risanje porazdelitev v statistiki; takšni grafi nimajo nobene povezave z gornjim.

Pri risanju grafov ne pazimo, da so dolžine povezav sorazmerne z resnično dolžino poti, prav tako nam je vseeno, koliko se mesta krogcev ujemajo z mesti hiš. (Spomnimo se shem mestnega javnega prometa: mesta, kjer so narisane postaje, se ne ujemajo z resničnim zemljevidom, pa tudi dolžine poti med postajami niso sorazmerne dejanskim.) Grafi so uporabni tudi za reševanje drugih problemov, kot sta, recimo, iskanje najkrajše poti med dvema mestoma ali iskanje najkrajše poti, po kateri obiščemo vsa mesta.

Postopek, ki ga učenci spoznajo pri tej aktivnosti, je uporaben za načrtovanje mrež, pri katerih je pomembno, da so vse hiše (ali vsi računalniki, vsa letališča...) povezane med sabo, vseeno pa nam je, koliko korakov je potrebnih za pot od ene do druge hiše.

Rezultat postopka je mreža asfaltiranih cest, ki je pravimo minimalno vpeto drevo (*minimal spanning tree*), nalogi pa problem iskanja minimalnega vpetega drevesa. Učinkovit postopek za iskanje takšnega drevesa, pri katerem začnemo s praznim zemljevidom, se imenuje Kruskalov postopek, po J. B. Kruskalu, ki ga je objavil leta 1956.

Kadar moramo pri načrtovanju misliti tudi na to, da bodo poti med pari hiš čim krajše, pa minimalna drevesa niso uporabna, kot smo videli v primeru povezave med Celjem in Ptujem. Za take probleme so primernejši drugi algoritmi.

Eden najbolj znanih sorodnih problemov je *problem trgovskega potnika*, ki mora obiskati vsa mesta (ali, recimo, vse hiše v naselju) tako, da pri tem prehodi čim krajšo pot. Če povečujemo število mest, ki jih mora obiskati potnik, se čas, ki ga danes znani postopki potrebujejo za izračun poti, zelo hitro podaljšuje; predstavljamo si lahko, da se čas reševanja z vsakim dodanim mestom podvoji. Še več: za ta problem pravimo, da je NP poln, kar pomeni, da zanj verjetno sploh ne obstajajo bistveno hitrejši algoritmi od tega, počasnega.